Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.11.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Linearna algebra**

1. Neka je $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu odrediti bazu i dimenziju.

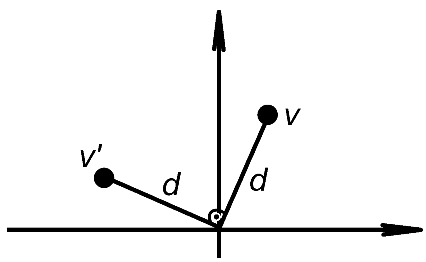
2. Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

3. Neka je $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi $\mathcal{S}$ (drugim riječima $[T]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ gdje je $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$). Odrediti matricu operatora T u bazi $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (drugim riječima odrediti $[T]_{\mathcal{S}'}$).

4. Neka je R rotacija, za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici desno.



a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti rotaciju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak.

c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je $\mathcal{L}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=0,\ -x_1+2x_2+x_3=0\}$.
Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$, odrediti mu bazu i dimenziju.

Rj. Znamo da je <u>neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je podprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako vrijedi (A1) $x,y\in\mathcal{S} \Rightarrow x+y\in\mathcal{S}$</u>

<u>(M1) $x\in\mathcal{S} \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.</u>

Da li je $\mathcal{L}$ neprazan skup?

$\mathcal{L}$ je neprazan zato što npr. $(1,-1,3)\in\mathcal{L}$

Za $\forall(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathcal{L}$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ imamo

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_2)$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=\underbrace{x_1+x_2}_{=0}+\underbrace{y_1+y_2}_{=0}=0 \qquad \dots(*)$$

$$-(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=$$

$$=\underbrace{-x_1+2x_2+x_2}_{=0}\ \underbrace{-y_1+2y_2+y_2}_{=0}=0 \qquad \dots(**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da vrijedi (A1)

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

$$\alpha x_1+\alpha x_2=\alpha\underbrace{(x_1+x_2)}_{=0}=0 \qquad \dots(\Delta)$$

$$-(\alpha x_1)+2(\alpha x_2)+(\alpha x_3)=\alpha\underbrace{(-x_1+2x_2+x_3)}_{=0}=0 \qquad \dots(\Delta\Delta)$$

Iz (Δ) i $(\Delta\Delta)$ vidimo da vrijedi (M1)
$\mathcal{L}$ jest vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$

Linearno nezavisan skup koji generira vektorski prostor V zovemo baza za V.

Ako je V podprostor od $\mathbb{R}^n$ tada:

$\mathcal{B}$ je baza za V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generira V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup od V

Prostor $\mathcal{L}$ možemo zapisati i u drugačijem obliku

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} = \ker\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}}_{=A}\Big)$$

$\mathcal{L} = \ker(A)$

Generator za $\ker(A)$ su linearno nezavisni vektori iz općeg rješenja $Ax = 0$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ -x + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\ -1&2&1&0 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\ 0&3&1&0 \end{array}\right] \overset{II_v : 3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\ 0&1&1/3&0 \end{array}\right]$$

$$\overset{I_v - II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&-1/3&0\\ 0&1&1/3&0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

rang A = rang $\bar{A}$ < 3 = broj nepoznatih
sistem ima ∞ mnogo rješenja i 1 nepoznatu uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned} x_1 \quad - \tfrac{1}{3} x_3 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{1}{3} x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad x_3 = 3t \qquad x_1 = t \quad x_2 = -t \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\-t\\3t\end{pmatrix}$$

Baza za $\mathcal{L}$ je $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ i $\dim \mathcal{L} = 1$. što je trebalo naći

$\dim V$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za V

(#) Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

Rj. Znamo da:

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A)=\{0\}$ akko $\operatorname{rang}(A)=n$ (gdje je $A_{n\times n}$)

Pa provjerimo da li je $\ker(A)=\{0\}$.

(Primjetimo da je matrica A dijagonalno dominantna, tj. $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$ za $\forall i=1,2,\dots,n$)

Pretpostavimo da postoji $x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$ takav da je $Ax=0$

Tada imamo

$$\begin{aligned} 7x_1+3x_2+0+\dots+0+0&=0\\ 2x_1+7x_2+3x_3+\dots+0+0&=0\\ 0+2x_2+7x_3+\dots+0+0&=0\\ &\vdots\\ 0+0+0+\dots+7x_{n-1}+3x_n&=0\\ 0+0+0+\dots+2x_{n-1}+7x_n&=0 \end{aligned}$$

Neka je $x_k=\max\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i posmatrajmo k-tu vrstu ovog sistema.

$$0+0+\ldots+2x_{k-1}+7x_k+3x_{k+1}+\ldots+0=0$$

$$7x_k=-2x_{k-1}-3x_{k+1} \quad /|\,|$$

$$7|x_k|=2|x_{k-1}|+3|x_{k+1}|\leq 2|x_k|+3|x_k|$$

$$7|x_k|\leq 5|x_k|$$

kontradikcija
(7 > 5)

(Slično bi imali i da je $k=1$ ili $k=n$.

Pretpostavka da postoji $x\neq 0$ takav da $Ax=0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome

$\ker A=\{0\}$ $\Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

Matrica A je nesingularna (postoji A^{-1}).

(#) Neka je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi $\mathcal{S}$ (drugim riječima $[T]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ gdje je: $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$).

Odrediti matrica operatora T u bazi $\varphi' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (drugim riječima odrediti $[T]_{\varphi'}$).

Rj.

$$[T]_{\varphi} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_{\varphi} & [T(e_2)]_{\varphi} & [T(e_3)]_{\varphi} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$[T(e_1)]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi}, \quad [T(e_3)]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\varphi}$$

$\Rightarrow$ $T(x) = Tx$ za $\forall x \in \mathbb{R}^3$ gdje je $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Odredimo α, β i γ t.d. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 2 \\ \beta - 2\gamma &= 5 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow III_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \overset{III_v + I_v \cdot (-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$3\gamma = 7$

$\gamma = \frac{7}{3}$

$\beta = 2\gamma + 5$

$\beta = \frac{14}{3} + 5$

$\beta = \frac{29}{3}$

Prema tome

$$\left[T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-22/3\\29/3\\7/3\end{pmatrix}$$

$\alpha + \beta - \gamma = 0$

$\alpha = \gamma - \beta = \frac{7}{3} - \frac{29}{3} = -\frac{22}{3}$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix};$$

Odredimo α, β i γ tako da $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 3 & 3\\0 & 1 & -2 & 3\\1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -1\\0 & 1 & -2 & 3\\2 & 1 & 3 & 3\end{array}\right] \overset{III_v + I_v\cdot(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -1\\0 & 1 & -2 & 3\\0 & -1 & 5 & 5\end{array}\right] \sim$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -1\\0 & 1 & -2 & 3\\0 & 0 & 3 & 8\end{array}\right] \Rightarrow 3\gamma = 8, \quad \gamma = \frac{8}{3}$$

$\beta = 2\gamma + 3 = \frac{16}{3} + \frac{9}{3} = \frac{25}{3}$

$\alpha + \beta - \gamma = -1$

$\alpha = -\frac{20}{3}$

$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-20/3\\25/3\\8/3\end{pmatrix}$$

I na kraju

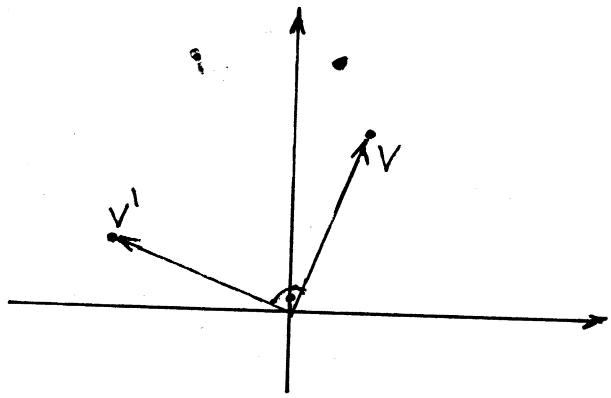
$$T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$$

ZA VJEŽBU

Prema tome

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-22/3 & -20/3 & -3\\29/3 & 25/3 & 5\\7/3 & 8/3 & 0\end{pmatrix}$$

Neka je R rotacija, za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici



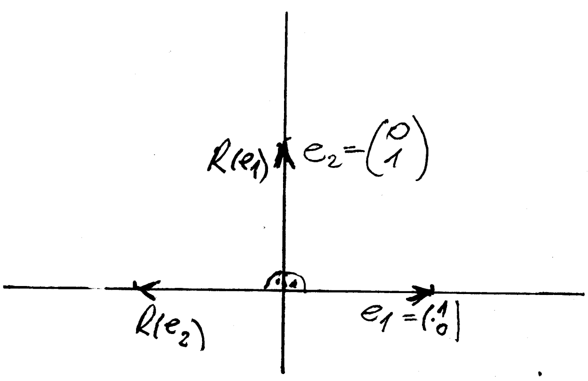
a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti rotaciju tačke $v = \binom{\alpha}{\beta}$ za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak.

Rj.

R je u stvari linearni operator na $\mathbb{R}^2$.

a) Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\mathcal{S} = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\} = \{e_1, e_2\}$.



Primetimo da je $R(e_1) = \binom{0}{1} = e_2$ (vidi sliku) i $R(e_2) = R\binom{0}{1} = \binom{-1}{0} = -e_1$

Znamo da $$[R]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [R(e_1)]_{\mathcal{S}} & [R(e_2)]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pa je $$[R]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Iz teorije Linearne algebre znamo

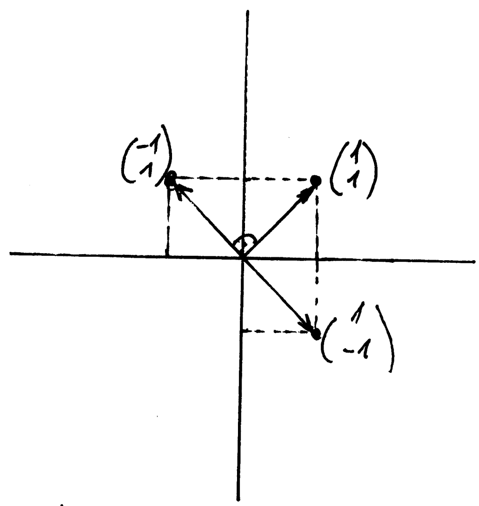
Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za vektorske prostore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

U našem slučaju

$$\left[P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_{\varphi} = [P]_{\varphi} \cdot \left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_{\varphi} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.



Rj. $\varphi' = \left\{\underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$

$$[R]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[R\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[R\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$R\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (vidi sliku) $\qquad R\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot u_1$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -u_2$$

$$[R]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$